ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Институт Фундаментального Образования

Факультет Общенаучных Кафедр - ФОК

Колебания бесконечной струны. Формула Даламбера. Обобщенные решения уравнения колебаний.

реферат

направление 6571000 - Прикладная математика
специальность 230401/073000 - Прикладная математика

Студент ФОК-3-2
Котов Ф.М.

Руководитель проекта:
профессор кафедры
высшей математики
Арефьев В.Н.

Москва 2008 год

Содержание

1 Задача Коши для волнового уравнения и ее решение

1.1 Физический смысл задачи

Рассмотрим свободные колебания бесконечной струны, т.е. настолько длинной, что влиянием ее концов на процесс колебаний можно пренебречь. Причинами колебаний могут являться начальные отклонения струны от равновесного положения и (или) сообщенный струне начальный импульс, обуславливающий некоторое начальное распределение скоростей частиц струны.

1.2 Математическая постановка задачи

Нужно решить однородное уравнение колебаний

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad t \in (0;+\infty),\ x \in (-\infty;+\infty) \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), \tag{2}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы на всей числовой оси.

Задача (1), (2) называется задачей Коши для волнового уравнения.

1.3 Решение

Теорема 1. *Решение уравнения (1) имеет вид*

$$u(x,t) = u_1(x - at) + u_2(x + at) \tag{3}$$

◀ Введем новые переменные

$$\xi = x - at$$
$$\eta = x + at$$

эта замена является невырожденной:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial t} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a \neq 0.$$

Преобразуя производные к новым переменным, находим:

$$\begin{aligned} u_t &= u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t = -a\, u_\xi + a\, u_\eta = a(u_\eta - u_\xi); \\ u_{tt} &= a(u_{\eta\xi}\xi_t + u_{\eta\eta}\eta_t - u_{\xi\xi}\xi_t - u_{\xi\eta}\eta_t) = a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}); \\ u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = u_\xi + u_\eta; \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x + u_{\eta\eta}\eta_x = u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

Уравнение (1) в новых переменных запишется слудующим образом:

$$a^2(u_{\xi\xi} - 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta}) = a^2(u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} + u_{\eta\eta})$$
$$u_{\xi\eta} = 0. \tag{4}$$

Общий вид решения этого уравнения мы можем найти интегрированием:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} = 0,$$

$$\int \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) d\eta = c(\xi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial\xi} = c(\xi),$$

где $c(\xi)$ - произвольная функция от ξ.

$$\int \frac{\partial u}{\partial\xi}\, d\xi = \int c(\xi)\, d\xi.$$

Пусть $\int c(\xi)\, d\xi = u_1(\xi)$

$$u(\xi,\eta) = u_1(\xi) + u_2(\eta),$$

где $u_1(\xi)$ и $u_2(\eta)$ - произвольные функции от ξ и η соответственно.

Следовательно, функция вида

$$u(x,t) = u_1(x - at) + u_2(x + at) \tag{5}$$

удовлетворяет уравнению (1). ▶

Теорема 2. *Существует решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), задаваемое формулой*

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at) + \varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\theta)\, d\theta \tag{6}$$

◀ По теореме 1 решение (1) имеет вид

$$u(x,t) = u_1(x - at) + u_2(x + at).$$

Определим функции u_1 и u_2 таким образом, чтобы удовлетворялись начальные условия (2):

$$u(x,0) = u_1(x) + u_2(x) = \varphi(x), \tag{7}$$
$$u_t(x,0) = -au_1'(x) + au_2'(x) = \psi(x). \tag{8}$$

Интегрируя (8) в пределах от x_0 (константа) до x получаем

$$a\left(-u_1(x) + u_1(x_0) + u_2(x) - u_2(x_0)\right) = \int\limits_{x_0}^{x} \psi(\theta)\, d\theta$$

Пусть $u_1(x_0) - u_2(x_0) = -C$, тогда

$$u_2(x) - u_1(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\theta)\,d\theta + C, \tag{9}$$

Из системы уравнений (7), (9) имеем

$$u_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\theta)\,d\theta - \frac{C}{2}; \tag{10}$$

$$u_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\theta)\,d\theta + \frac{C}{2}. \tag{11}$$

Подставляя (10) и (11) в (3), находим

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) - \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x-at} \psi(\theta)\,d\theta + \frac{1}{2}\varphi(x+at) + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(\theta)\,d\theta,$$

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x_0} \psi(\theta)\,d\theta + \frac{1}{2a}\int\limits_{x_0}^{x+at} \psi(\theta)\,d\theta,$$

или

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\theta)\,d\theta \tag{12}$$

▶

Определение 1 Формула (6) называется **формулой Даламбера**.

1.4 Существование и единственность решения

Теорема 3. *Если функция $\varphi(x)$ имеет производные до второго порядка включительно, а функция $\psi(x)$ - до первого порядка, то существует решение задачи Коши (1),(2).*

◀ При указанных условиях формула (6) определяет решение задачи, в чем нетрудно убедиться, подставив её в уравнение (1) и условия (2). ▶

Теорема 4. *Если решение задачи Коши (1),(2) существует, то оно единственно*

◀ Из теоремы 2 следует, что решение единственно. Действительно, если бы существовало второе решение, то оно тоже определялось бы формулой (6) и совпадало бы с первым решением. ▶

Таким образом, если $\varphi(x)$ дифференцируема 2 раза, а $\psi(x)$ дифференцируема, то решение задачи Коши существует и единственно.

1.5 Непрерывная зависимость решения от начальных условий

Докажем, что решение задачи Коши для волнового уравнения меняется непрерывно при непрерывном изменении начальных условий.

Теорема 5.

$\forall\, t_0 > 0\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon, t_0)$:
$\Big((|\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| < \delta) \wedge (|\psi_1(x) - \psi_2(x)| < \delta) \Big) \Longrightarrow \big(\forall\ t \in [0; t_0]\ |u_1(x,t) - u_2(x,t)| < \varepsilon\big),$

где $u_1(x)$ *- решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u\big|_{t=0} = \varphi_1(x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi_1(x),$$

$u_2(x)$ *- решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u\big|_{t=0} = \varphi_2(x); \qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi_2(x).$$

◀ Функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ определяются соответствующими начальными условиями по формуле (6), так что

$$|u_1(x,t) - u_2(x,t)| \leqslant \frac{|\varphi_1(x+at) - \varphi_2(x+at)|}{2} + \frac{|\varphi_1(x-at) - \varphi_2(x-at)|}{2} +$$
$$+ \frac{1}{2a} \int\limits_{x-at}^{x+at} |\psi_1(\theta) - \psi_2(\theta)|\, d\theta \leqslant \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{1}{2a}\, \delta \cdot 2at \leqslant \delta(1 + t_0)$$

При $\delta = \frac{\varepsilon}{1+t_0}$ получим утверждение теоремы. ▶

2 Обобщенные решения уравнения колебаний

Физические задачи далеко не всегда приводят к начальным условиям, достаточно гладким для того, чтобы формула Даламбера давала классическое (дифференцируемое два раза) решение задачи (1), (2). В этом случае полезным оказывается понятие так называемого "обобщенного решения"уравнения (1). Различных определений обобщенного решения существует несколько. Мы рассмотрим три из них.

2.1 Определение обобщенных решений уравнения колебаний через интегральные тождества

Определение 2

$$A := \{\eta : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} |\ \exists \Omega_\eta \subset \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 1)\Omega_\eta - \text{область (открытое связное множество)} \\ 2)\eta \text{ имеет в } \Omega_\eta \text{ непрерывные производные до} \\ \quad \text{второго порядка включительно} \\ 3)\eta(x,t) = 0, (x,t) \notin \Omega_\eta \} \end{array}$$

Определение 3 Функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением уравнения (1), если

$$\forall\ \eta \in A\ \exists \iint\limits_{\Omega_\eta} u(x,t)\left[\eta_{tt}(x,t) - a^2\eta_{xx}(x,t)\right]\,dxdt = 0$$

Покажем, что классические решения уравнения (1) удовлетворяют определению 3.

Лемма 1. *Пусть $u(x,t)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция. $u(x,t)$ является решением (1) тогда и только тогда, когда*

$$\forall\ \eta \in A\ \exists \iint\limits_{\Omega_\eta} \eta(x,t)\left[u_{tt}(x,t) - a^2u_{xx}(x,t)\right]\,dxdt = 0 \tag{13}$$

◀

($\Rightarrow$) $u(x,t)$ - решение (1) $\Rightarrow$ $\forall (x,t)\ \ u_{tt}(x,t) - a^2u_{xx}(x,t) = 0 \Rightarrow$ (13) выполняется.

($\Leftarrow$) Пусть $w(x,t) = u_{tt}(x,t) - a^2u_{xx}(x,t) \neq 0$ в какой-нибудь точке (x_0,t_0). $u(x,t)$ - дважды непрерывно дифференцируемая функция $\Rightarrow$ $w(x,t)$ - непрерывная функция $\Rightarrow$ $w(x,t) \neq 0$ и сохраняет знак в некоторой окрестности U точки (x_0,t_0). Выберем функцию $\eta_U(x,t) \in A : \ (\eta_U(x,t) > 0, (x,t) \in U) \wedge ((x,t) \notin U \Rightarrow \eta_U(x,t) = 0)$. Для этой функции (13), очевидно, не выполняется. Мы пришли к противоречию, значит $\forall (x,t)\, w(x,t) = u_{tt}(x,t) - a^2u_{xx}(x,t) = 0$ ▶

Теорема 6. *Дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x,t)$ является решением (1) тогда и только тогда, когда*

$$\forall\ \eta \in A\ \exists \iint\limits_{\Omega_\eta} u(x,t)\left[\eta_{tt}(x,t) - a^2\eta_{xx}(x,t)\right]\,dxdt = 0 \tag{14}$$

◀ Любая функция $\eta(x,t) \in A$ вместе со своими производными обращаются в нуль на границе соответствующей ей области Ω_η. На этом свойстве основаны следующие преобразования:

$$\iint\limits_{\Omega_\eta} \eta(x,t)u_{tt}(x,t)\,dxdt = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\int\limits_{t_1(x)}^{t_2(x)} \eta(x,t)u_{tt}(x,t)\,dt\right)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\int\limits_{t_1(x)}^{t_2(x)} \eta(x,t)\,d_tu_t\right)dx =$$

$$= \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\eta(x,t)u_t(x,t)\Big|_{t_1(x)}^{t_2(x)} - \int\limits_{t_1(x)}^{t_2(x)} \eta_t(x,t)u_t(x,t)\,dt\right)dx = -\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\int\limits_{t_1(x)}^{t_2(x)} \eta_t(x,t)\,d_tu\right)dx =$$

$$= -\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\eta_t(x,t)u_t(x,t)\Big|_{t_1(x)}^{t_2(x)}\right)\,dx + \int\limits_{x_1}^{x_2}\left(\int\limits_{t_1(x)}^{t_2(x)} \eta_{tt}(x,t)u(x,t)\,dt\right)dx = \iint\limits_{\Omega_\eta} \eta_{tt}(x,t)u(x,t)\,dxdt$$

Аналогично можно показать, что

$$\iint\limits_{\Omega_\eta} \eta(x,t)u_{xx}(x,t)\,dxdt = \iint\limits_{\Omega_\eta} \eta_{xx}(x,t)u(x,t)\,dxdt.$$

Из леммы 1 и последних двух равенств следует утверждение доказываемой теоремы. ▶

2.2 Обобщенные решения задачи Коши для уравнения колебаний, как предел последовательности классических решений

Определение 4 Функция $u(x,t)$ называется обобщенным решением задачи Коши (1), (2), если существует последовательность $\{u_n(x,t)\}_{n=1}^{\infty}$ классических решений задачи Коши для уравнения (1) с начальными условиями

$$u_n\big|_{t=0} = \varphi_n(x); \qquad \left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_n(x),$$

таких что

$$\Big(||\varphi_n(x) - \varphi(x)|| \to 0\Big) \wedge \Big(||\psi_n(x) - \psi(x)|| \to 0\Big) \wedge \Big(||u_n(x,t) - u(x,t)|| \to 0\Big).$$

В качестве норм используются следующие (для функций двух и одной переменной соответственно):

$$||u(x,t)|| = \sqrt{\max_t \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u(x,t))^2\, dx},$$

$$||f(x)|| = \sqrt{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f(x))^2\, dx}$$

Функции u_n, u, φ_n, φ, ψ_n, ψ берутся только такие, для которых указанные нормы существуют.

Предельная функция для последовательности $\{u_n(x,t)\}$ уже не обязательно всюду дифференцируема (см. рис. 1 а), а может быть даже разрывна (см. рис. 1 б).

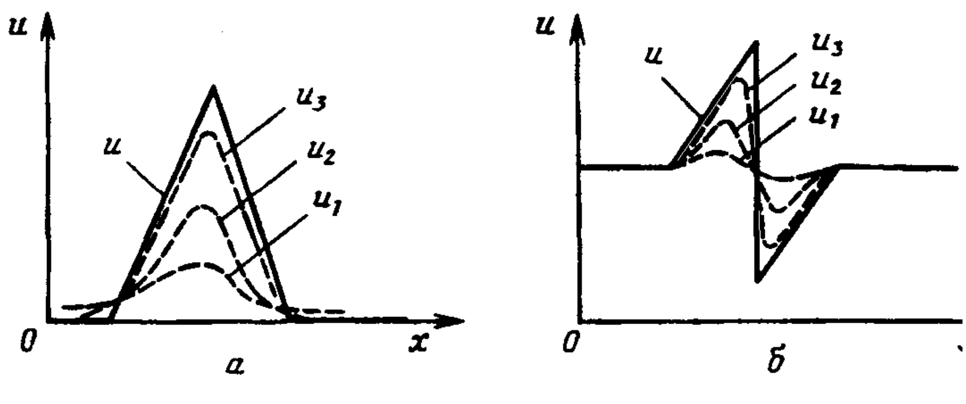


Рис. 1:

Очевидно, что классические решения, если они существуют, являются обобщенными решениями задачи (1), (2) в смысле определения 4.

Такое понятие обобщенного решения неудобно тем, что оно трудно проверяемо: чтобы убедиться, что некоторая функция $u(x,t)$ является обобщенным решением нашей задачи необходимо построить последовательность гладких решений, сходящихся к ней.

2.3 Определение обобщенных решений задачи Коши для уравнения колебаний с использованием обобщенных функций

2.3.1 Определения

Определение 5

$$C_0^\infty := \Big\{\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \Big| \big(\varphi \text{ является бесконечно дифференцируемой}\big) \wedge \\ \wedge \big(\exists\, [B_{1,\varphi}, B_{2,\varphi}] :\, x \notin (B_{1,\varphi}, B_{2,\varphi}) \Rightarrow \varphi(x) = 0\big)\Big\}$$

Определение 6 Введем в C_0^∞ метрику следующим образом: пусть $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty$ и $[x_1, x_2]$ - отрезок, вне которого обе эти функции обращаются в нуль, тогда

$$\rho(\varphi_1, \varphi_2) = \max_{x\in[x_1,x_2]} |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| \tag{15}$$

Теорема 7. *Функционал (15) является метрикой*

◀

1. Функции из C_0^∞ являются непрерывными, поэтому максимум в (15) существует, значит $\rho(\varphi_1, \varphi_2)$ определена на всем $C_0^\infty \times C_0^\infty$.
2. $\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty\ \big(\rho(\varphi_1, \varphi_2) = 0\big) \Longrightarrow \big(\varphi_1 = \varphi_2\big)$ - очевидно
3. $\forall\, \varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty\ \rho(\varphi_1, \varphi_2) = \rho(\varphi_2, \varphi_1)$ - очевидно
4. Неравенство треугольника:

$$\forall\, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in C_0^\infty\ \ \rho(\varphi_1, \varphi_3) = \max_{x\in[x_1,x_2]} |\varphi_3(x) - \varphi_1(x)| = \\ = \max_{x\in[x_1,x_2]} |\varphi_3(x) - \varphi_2(x) + \varphi_2(x) - \varphi_1(x)| \leqslant \\ \leqslant \max_{x\in[x_1,x_2]} \Big(|\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| + |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)|\Big) \leqslant \\ \leqslant \max_{x\in[x_1,x_2]} |\varphi_3(x) - \varphi_2(x)| + \max_{x\in[x_1,x_2]} |\varphi_2(x) - \varphi_1(x)| = \\ = \rho(\varphi_1, \varphi_2) + \rho(\varphi_2, \varphi_3)$$

▶

Определение 7 Под сходимостью последовательности функций $\{\varphi_n\} \subset C_0^\infty$ к некоторой $\varphi \subset C_0^\infty$ будем понимать одновременное выполнение следующих двух условий:

1. $\{\varphi_n\} \underset{\rho}{\to} \varphi$

2. $\exists\,[x_1, x_2] : \forall\, n \in \mathbf{N}\ \big(x \notin (x_1, x_2) \Rightarrow \varphi_n(x) = 0\big)$

Обозначать такую сходимость будем $\{\varphi_n\} \underset{\rho}{\rightrightarrows} \varphi$

Определение 8 Обобщенной функцией называется непрерывный линейный функционал $F : C_0^\infty \mapsto \mathbb{R}$.

Здесь непрерывность функционала понимается в том смысле, что

$$\{\varphi_n\} \underset{\rho}{\rightrightarrows} \varphi \Longrightarrow \{F(\varphi_n)\} \longrightarrow F(\varphi)$$

Множество обобщенных функций будем обозначать **K**.

Значение обобщенной функции F на функции $\varphi \in C_0^\infty$ будем обозначать $\langle F, \varphi\rangle$ или $\langle F(x), \varphi(x)\rangle$. Запись $F(x)$, хотя она и не совсем корректна, подчеркивает некоторую аналогию между обобщенными функциями и функциями действительного переменного, к тому же она пригодится нам для определения операции "сдвинутой"обобщенной функции $F(x-a)$.

Определение 9 Будем называть **обычными** функции, интегрируемые на любом конечном интервале (в частности, непрерывные функции,очевидно, являются обычными).

Покажем, что любой обычной функции f можно однозначно поставить в соответствие некоторую обобщенную функцию по формуле

$$\langle F_f, \varphi\rangle = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{16}$$

Линейность (16) очевидна. Докажем непрерывность этого функционала.

◀ Действительно, пусть последовательность $\{\varphi_n\}$ функций из C_0^∞ сходится к некоторой функции $\varphi \in C_0^\infty$ в смысле определения 7. Обозначим (x_1, x_2) - интервал, вне которого функции φ_n обращаются в нуль (он существует по определению 7).

$$\big|\langle F_f, \varphi_n\rangle - \langle F_f, \varphi\rangle\big| = \left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big)\,dx\right| = \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\big(\varphi_n(x) - \varphi(x)\big)\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{[x_1,x_2]} |\varphi_n - \varphi| \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right|$$

$\{\varphi_n\}_{n=1}^\infty \underset{\rho}{\rightrightarrows} \varphi \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{[x_1,x_2]} |\varphi_n - \varphi| = 0$, а $\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$ равен некоторой константе, значит $\max\limits_{[x_1,x_2]} |\varphi_n - \varphi| \left|\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, а отсюда следует $\big|\langle F_f, \varphi_n\rangle - \langle F_f, \varphi\rangle\big| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, что и требовалось доказать

▶

Теорема 8. *Двум различным непрерывным функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответствуют различные обобщенные функции, определенные формулой (16).*

◀ Пусть $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Если $f(x) \not\equiv 0$, то существует такая точка x_0, что $f(x_0) \neq 0$. Тогда $f(x)$ сохраняет знак в некоторой окрестности (a, b) точки x_0. Среди функций C_0^∞ выберем некоторую функцию φ_0, которая обращается в 0 вне (a, b) и сохраняет знак внутри (a, b). Очевидно, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_0(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\varphi_0(x)\,dx \neq 0,$$

а значит

$$\langle F_{f_1}, \varphi_0\rangle - \langle F_{f_2}, \varphi_0\rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (f_1(x) - f_2(x))\varphi_0(x)\,dx \neq 0.$$

▶

Можно доказать также и более общее утверждение: если двум функциям $f_1(x)$ и $f_2(x)$, интегрируемым на любом конечном отрезке, соответствует одна и та же обобщенная функция F_f, то эти функции совпадают везде, за исключением множества меры нуль.

2.3.2 Операции над обобщенными функциями

Определение 10 Произведение $\alpha \cdot F$ функции $\alpha \in C_0^\infty$ на $F \in \mathbf{K}$ определим так

$$\forall\, \varphi \in C_0^\infty \;\; \langle \alpha \cdot F, \varphi\rangle = \langle F, \alpha \cdot \varphi\rangle$$

Определение 11 Сдвинутую на число a функцию $F \in \mathbf{K}$ будем обозначать $F(x - a)$ и зададим следующим образом

$$\forall\, \varphi \in C_0^\infty \;\; \langle F(x - a), \varphi(x)\rangle = \langle F(x), \varphi(x - a)\rangle$$

Определение 12 Производная F' от обобщенной функции $F \in \mathbf{K}$ определяется следующей формулой

$$\forall\, \varphi \in C_0^\infty \;\; \langle F', \varphi\rangle = -\langle F, \varphi'\rangle$$

Замечательной особенностью обобщенных функций является существование их производных любого порядка (это обусловлено тем, что функции $\varphi \in C_0^\infty$ бесконечно дифференцируемы). Теперь, даже если какая-то обычная функция не является дифференцируемой, мы всегда можем найти производные любого порядка для соответствующей ей обобщенной функции. На этом факте и основано третье определение обобщенного решения.

2.3.3 Примеры обобщенных функций

Для нас будут важны две обобщенные функции.

Функция Дирака $\delta(x)$ определяется так

$$\forall\, \varphi \in C_0^\infty \;\; \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle = \varphi(0)$$

Функция Хевисайда $H(x)$ Функция Хевисайда - обобщенная функция, соответствующая обычной функции

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\infty, 0) \\ 1, & x \in [0, +\infty] \end{cases}$$

Легко убедиться, что $H'(x) = \delta(x)$:

$$\forall\, \varphi \in C_0^\infty \;\; \langle H'(x), \varphi(x) \rangle = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} H(x)\varphi'(x)\, dx = -\int\limits_{0}^{x_{2,\varphi}} 1 \cdot \varphi'(x)\, dx = $$
$$- \varphi(x_{2,\varphi}) + \varphi(0) = \varphi(0) = \langle \delta(x), \varphi(x) \rangle$$

2.3.4 Нахождение обобщенных решений

Прежде всего, отметим, что обобщенные частные производные от функции двух переменных $u(x, y)$, скажем по x, можно понимать, как производные от обобщенной функции, соответствующей функции одного переменного $u_y(x)$, которая получается из $u(x, y)$ при любом фиксированном y.

Определение 13 Обобщенным решением задачи (1), (2) называется функция $u(x, y)$, такая, что (1), (2) обращаются в тождества при подстановке этой функции в них, если под производными $u(x, y)$ понимать ее обобщенные производные.

В качестве примера рассмотрим задачу (1), (2) при

$$\varphi(x) = H(x+1) - H(x-1) \quad \text{(см. рис. 2)},$$
$$\psi(x) \equiv 0$$

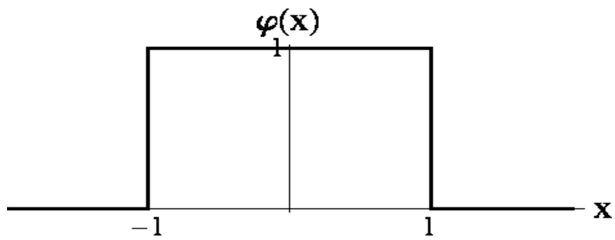


Рис. 2:

По формуле Даламбера (6) получаем

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2} =$$
$$= \frac{1}{2}\big(H(x - at + 1) - H(x - at - 1) + H(x + at + 1) - H(x + at - 1) \big)$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}\big(-a\delta(x-at+1) + a\delta(x-at-1) + a\delta(x+at+1) - a\delta(x+at-1)\big)$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}\big(a^2\delta'(x-at+1) - a^2\delta'(x-at-1) + a^2\delta'(x+at+1) - a^2\delta'(x+at-1)\big)$$

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}\big(\delta(x-at+1) - \delta(x-at-1) + \delta(x+at+1) - \delta(x+at-1)\big)$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2}\big(\delta'(x-at+1) - \delta'(x-at-1) + \delta'(x+at+1) - \delta'(x+at-1)\big)$$

Видим, что полученная по формуле Даламбера функция $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2).

Аналогично можно получить решение для любых кусочно непрерывных $\varphi(x)$ и $\psi(x)$

3 Метод характеристик

3.1 Распространение волн

Рассмотрим функцию $u_1(x,t) = f(x-at)$. Изобразим график этой функции в различные моменты времени $t=0$, $t=t_1$ и $t=t_2$ $(0 < t_1 < t_2)$ (рис. 3).

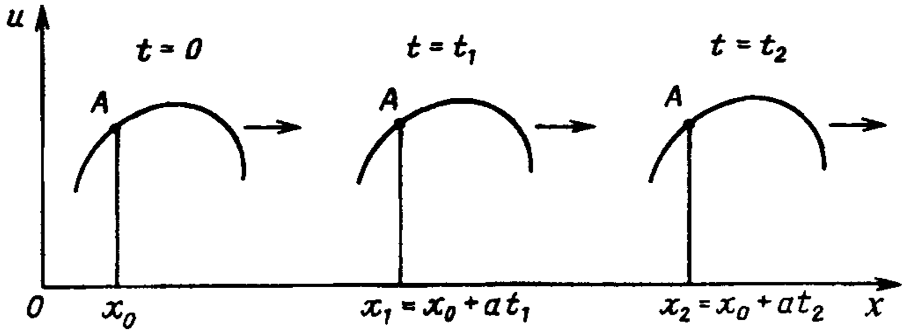


Рис. 3: Бегущая волна

Видно, что функция $u_1(x,t)$ представляет собой неизменный профиль $f(x)$, перемещающийся вправо в положительном направлении оси Ox с конечной скоростью, равной a. При этом отклонение в точке x_2 повторяет отклонение в точке x_1 лишь со сдвигом по времени на время запаздывания $\tau = (x_2 - x_1)/a$.

В подвижной системе координат, движущейся в право со скоростью a, наблюдатель будет видеть все время один и тот же как бы застывший профиль струны.

Такой процесс распространения отклонений (возмущений) в струне представляет собой волновой процесс. При этом волну, бегущую с постоянной скоростью a вправо вдоль оси Ox назовем прямой бегущей волной.

Наглядное изображение такого волнового процесса можно получить, вводя плоскость состояний (фазовую плоскость) (x,t) и описывая исследуемый процесс в верхней полуплоскости $t > 0$ (рис. 4).

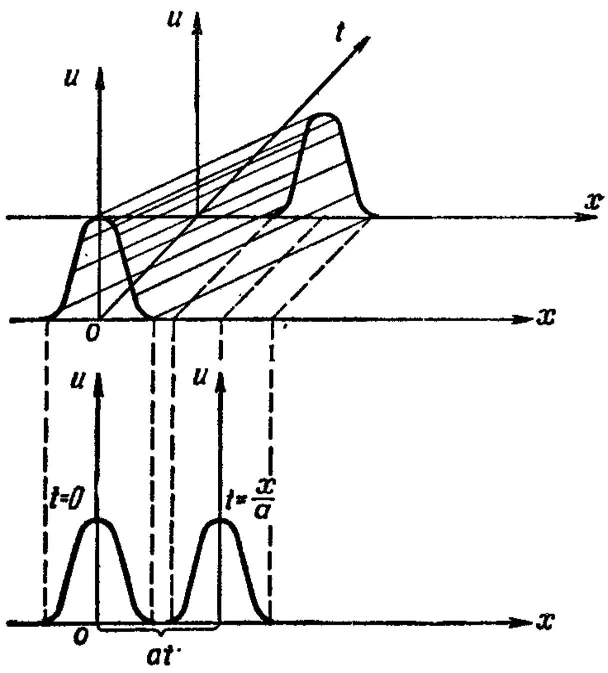
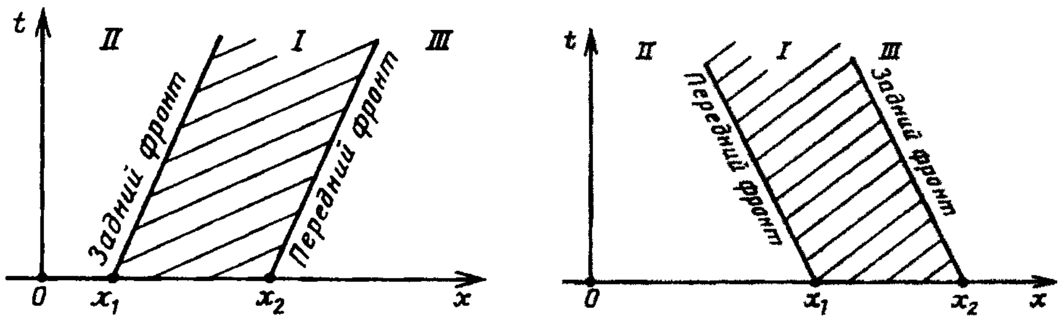


Рис. 4: Плоскость состояний



а б

Рис. 5: Фронты прямой (а) и обратной (б) волн

Функция $u_1(x, t)$ сохраняет постоянные значения на линиях $x - at = const$ плоскости (x, t) (рис. 5 а), которые являются характеристиками волнового уравнения (1).

Предположим теперь, что функция $f(x)$ отлична от нуля лишь в интервале $x_1 < x < x_2$ и равна нулю вне этого интервала. Функцию такого вида называют финитной, а отрезок $[x_1, x_2]$ - носителем этой финитной функции.

Для этого случая на плоскости состояний проведем через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$. Они разбивают полуплоскость $t > 0$ на три области. В области I функция $u_1(x, t) = f(x - at)$ отлична от нуля, причем характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$ выделяют передний и задний **фронты** распространяющейся направо волны, так как на плоскости состояний они отделяют область возмущений I от невозмущенных областей II, III, где функция $u_1(x, t)$ равна нулю.

Аналогично функция $u_2(x, t) = f(x + at)$ представляет собой волну, распространяющуюся с постоянной скоростью a влево в отрицательном направлении оси Ox. Такую волну назовем обратной бегущей волной. Две характеристики $x + at = x_1$

и $x + at = x_2$ проходящие через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ выделяют фронты обратной волны (рис. 5 б).

3.2 Распространение волн отклонения

Пусть в задаче (1),(2) $\psi(x) = 0$, т.е. струна колеблется только в результате начального отклонения, форма которого определяется функцией $\varphi(x)$. Решение (6) принимает в этом случае простой вид:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x - at) + \varphi(x + at)\right]. \tag{17}$$

Из предыдущих рассуждений видно, что решение (17) задачи о распространении волн отклонения представляет собой суперпозицию (наложение) прямой и обратной бегущих волн, профиль которых с точностью до множителя, равного $\frac{1}{2}$, совпадает с профилем начального распределения отклонений струны.

Рассмотрим, например, случай, когда $\varphi(x)$ отлична от нуля на интервале $[-l, l]$ и четна. На рисунке 6 показаны профили струны в различные моменты времени (Пунктиром показаны прямая и обратная волны в области их наложения). В начальный момент времени профили обеих волн совпадают. До тех пор, пока $t < \frac{l}{a}$, есть участок, где волны накладываются друг на друга, начиная с момента $t = \frac{l}{a}$ эти волны уже не накладываются и расходятся в разные стороны.

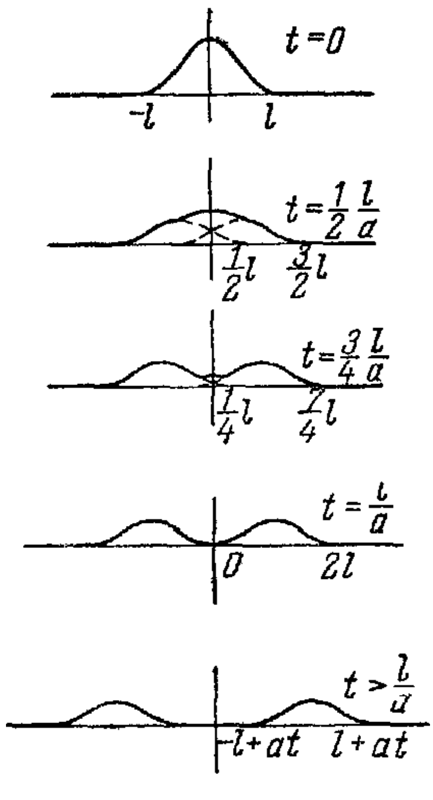


Рис. 6: Волны отклонения

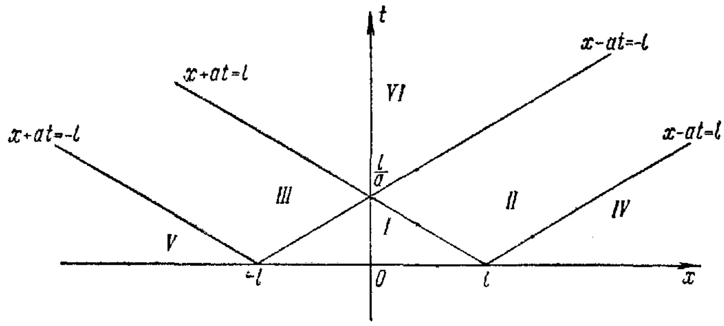


Рис. 7:

Очень наглядное изображение описанного процесса можно получить на фазовой плоскости, если провести на ней характеристики для прямой и обратной волн через точки $(l, 0)$ и $(-l, 0)$ (см. рис 7).

Точки этих характеристик соответствуют положениям переднего и заднего фронтов обеих волн в различные моменты времени. Полуплоскость разбивается ими на 6 частей. Колебание происходит только в тех точках и в те моменты времени, которые соответствуют точкам зон I, II и III. В зоне II действует только прямая волна, в зоне III - только обратная, а в зоне I и та и другая. В точках, соответствующих зонам IV и V, колебаний еще нет, так как до них не дошел передний фронт прямой (зона IV) и обратной (зона V) волн, а в точках, соответствующих зоне VI, колебания уже нет, так как через них задние фронты обеих волн уже прошли.

3.3 Распространение волн импульса

Пусть теперь в задаче Коши (1),(2) $\varphi(x) = 0$, а струна колеблется в результате сообщения ее частицам в начальный момент времени импульса (скорости).

Решение Даламбера (6) в этом случае запишется в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at} \psi(\theta)\,d\theta \tag{18}$$

Покажем, что и это решение представляет собой суперпозицию двух бегущих волн, распространяющихся в противоположных направлениях со скоростью a. Для этого введем функцию

$$\Psi(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(\theta)\,d\theta,$$

являющуюся с точностью до постоянного множителя первообразной для начального распределения скоростей $\psi(x)$.

Тогда формуле (18) можно придать вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Psi(x+at) - \Psi(x-at)\right].$$

Такая форма решения показывает, что и в случае сообщения частицам струны начального импульса колебания распространяются в виде суперпозиции прямой $u_1(x,t) = -\Psi(x-at)$ и обратной $u_2(x,t) = \Psi(x+at)$ бегущих волн. Форма первой из них в начальный момент $t = 0$ имеет вид $u_1(x,0) = -\Psi(x)$, а второй – $u_2(x,0) = \Psi(x)$. В сумме получаем $u(x,0) = 0$, чего и следовало ожидать.

Чтобы наглядно представить себе картину процесса, для простоты будем считать, что $\psi(x)$ четна и равна нулю всюду вне интервала $(-l,l)$ (рис. 8). Функция $\Psi(x)$ в этом случае будет выглядеть так (см. рис. 8)

$$\Psi(x) = \frac{1}{a}\int\limits_{0}^{x} \psi(\theta)\,d\theta = \begin{cases} \frac{1}{a}\int\limits_{0}^{-l} \psi(\theta)\,d\theta = -h = const, & x \in (-\infty,-l) \\ \frac{1}{a}\int\limits_{0}^{x} \psi(\theta)\,d\theta, & x \in [-l,l] \\ \frac{1}{a}\int\limits_{0}^{l} \psi(\theta)\,d\theta = h = const, & x \in (l,+\infty) \end{cases} \tag{19}$$

На рисунке 9 показаны профили струны и графики $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$ (пунктирные линии) в различные моменты времени.

Как и в предыдущем случае, изобразим ход колебаний на фазовой плоскости (см. рис 10). Пользуясь выражением (19) для функции $\Psi(x)$, получаем, что в зонах II, IV и VI отклонение обратной волны постоянно и равно $\frac{h}{2}$, а в точках зон III,V и VI такое же отклонение имеет прямая волна, поэтому зона VI представляет собой зону остаточного смещения, в точках, ей соответствующих, функция $u(x,t) = \frac{1}{2}(\Psi(x+at) - \Psi(x-at)) = h$. В зоне IV прямая волна имеет отклонение $-\frac{h}{2}$, такое же отклонение в зоне V имеет обратная волна. Поэтому обе этих зоны являются зонами покоя точек струны.

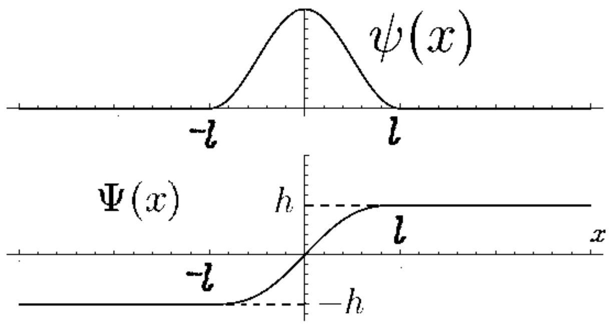


Рис. 8:

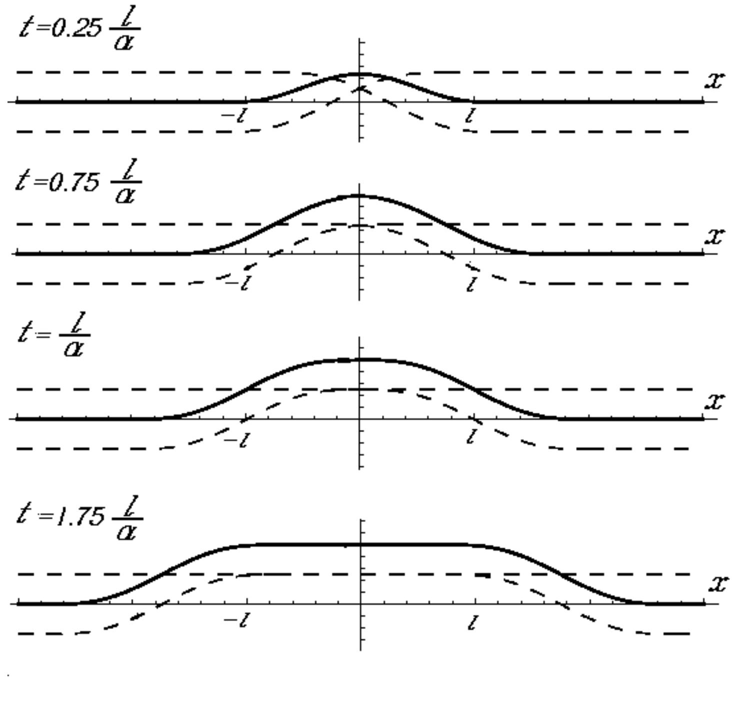


Рис. 9:

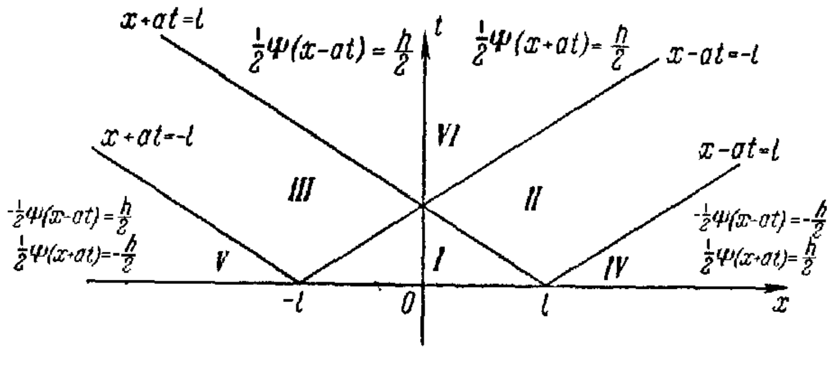


Рис. 10:

3.4 Метод характеристик

Для определения отклонения $u(x_0, t_0)$ в некоторой точке струны с координатой x_0 в момент времени t_0 в общем случае распространения волн отклонения и волн импульса на плоскости состояний (x, t) построим треугольник (рис. 11), проведя через точку $M_0(x_0, t_0)$ две характеристики $x \pm at = const$, которые пересекут ось Ox в точках M_1 и M_2 с абсциссами $x_1 = x_0 - at_0$ и $x_2 = x_0 + at_0$. Такой треугольник $M_1M_0M_2$ назовем характеристическим треугольником.

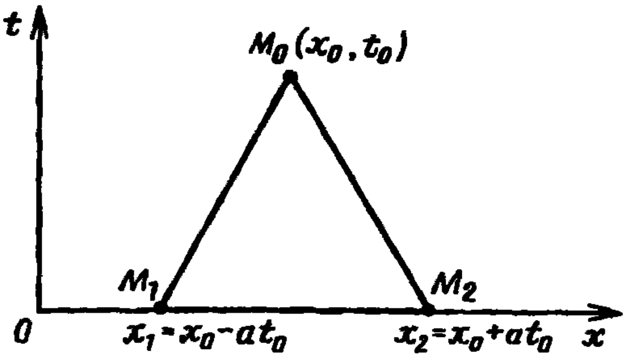


Рис. 11:

Из формулы Даламбера (6) следует, что отклонение точки струны с координатой x_0 в момент времени t_0 определяется только значениями начального отклонения в вершинах M_1 и M_2 характеристического треугольника и значениями начальной скорости частиц струны, расположенных на основании M_1M_2 этого треугольника. Действительно, формула (6) при $x = x_0$ и $t = t_0$ дает (такая запись не совсем корректна, зато весьма наглядна)

$$u(M_0) = \frac{1}{2}\left[\varphi(M_1) + \varphi(M_2)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{M_1}^{M_2} \psi(\theta)\, d\theta.$$

Это свойство решения задачи Коши (1),(2) обусловлено конечной скоростью распространения возмущений в процессах, описываемых волновым уравнением (уравнением гиперболического типа).

4 Список литературы

1. Л.К.Мартинсон, Ю.И.Малов "Дифференциальные уравнения математической физики издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва 2006

2. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский "Уравнения математической физики"

3. И.Г.Араманович, В.И.Левин "Уравнения математической физики издательство "Наука Москва 1969

4. С.К.Годунов "Уравнения математической физики издательство "Наука Москва 1979

5. И.Г. Петровский "Лекции об уравнениях с частными производными Москва 1961

6. А.И.Комеч "Практическое решение уравнений математической физики Механико-математический факультет МГУ, Москва 1993

7. Арефьев В.Н. "Лекции по уравнениям математической физики" http://vicaref.mgsu.ru/